VILLE DE PARIS

CONCOURS D'ENTRÉE A L'ÉCOLE DES INGÉNIEURS DE LA VILLE DE PARIS 1982

ouvert le 21 avril 1982

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 h)

Dans tout le problème :

n désigne un entier strictement positif.

$\mathcal{P}$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à une indéterminée.

$\mathcal{P}_n$ est le sous espace vectoriel de $\mathcal{P}$ des polynômes de degré au plus n

La Partie 3 est indépendante du reste du problème.

Pour traiter une question on pourra admettre les résultats des questions précédentes.

La clarté et la rigueur des démonstrations seront particulièrement appréciées.

PARTIE I

On considère les polynômes T_n définis par :

$T_0(X) = 1$

$T_1(X) = X$

$T_{n+1}(X) = 2XT_n - T_{n-1}$

I 1°) Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$

I 2°) Montrer que T_n est l'unique polynôme P vérifiant $P(\cos\theta) = \cos n\theta$

I 3°) Calculer T_2, T_3, T_4

I 4°) Quel est le degré de T_n ? Quel est le coefficient du terme de plus haut degré ? Quelles sont les racines de T_n

I 5°) Si T_n s'écrit : $T_n(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, montrer que $a_k = 0$ si k et n ne sont pas de la même parité

I 6°) Sur $\mathcal{P}$ on considère le produit scalaire

$$(P, Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Montrer que les T_n forment une famille orthogonale pour ce produit scalaire et calculer (P, P)

I 7°) ch désignant la fonction cosinus hyperbolique, montrer que $T_n(\mathrm{ch}\,t) = \mathrm{ch}\,nt$

PARTIE II

II A On considère l'équation différentielle :

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + n^2 f(x) = 0$$

II A 1°) Montrer qu'il existe des solutions f développables en série entière au voisinage de 0, c'est-à-dire, telle que $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

On cherchera une relation de récurrence vérifiée par les a_k, puis on montrera que le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1

.../...

II A 2°) Montrer que T_n est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

II A 3°) Montrer que l'une des conditions ($f(0) = 0$, $f'(0) = 1$) ou ($f(0) = 1$, $f'(0) = 0$) définit une solution ϕ sur $]-1, 1[$ qui n'est pas un polynôme

II A 4°) Montrer que ϕ et P sont linéairement indépendants. En déduire toutes les solutions polynômes sur $\mathbb{R}$

II B On cherche les couples (P, Q) de polynômes vérifiant

(II B) $\quad P(X)^2 = 1 + (X^2 - 1)\, Q(X)^2$

II B 1°) Montrer qu'il existe un polynôme Q_n unique tel que

$$\forall \theta \in]0, \pi[\qquad \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = Q_n(\cos \theta)$$

II B 2°) Montrer que (T_n, Q_n) vérifie (II B)

II B 3°) Donner toutes les solutions de (II B)
on pourra remarquer que P et Q sont premiers entre eux puis on cherchera une équation différentielle vérifiée par P

PARTIE III

on se donne :

$a_0, a_1, \cdots, a_n$ $(n+1)$ réels distincts
$b_0, b_1, \cdots, b_n$ $(n+1)$ réels

On veut résoudre le problème suivant :

(III) trouver $P \in \mathcal{P}_n$ tel que $\forall i \in \{0, \cdots, n\} \quad P(a_i) = b_i$

III A Existence et unicité de la solution de (III)

III A 1°) Montrer que (III) a au plus une solution

III A 2°) on pose

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} a_0^n & a_0^{n-1} & \cdots & 1 \\ a_1^n & a_1^{n-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^n & a_n^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Montrer que $V(a_0, \cdots a_n) = \prod_{i<j} (a_i - a_j)$

III A 3°) Montrer que (III) admet une solution, qu'on ne demande pas explicitement, et une seule. (on se ramènera à l'étude d'un système linéaire)

.../...

III 8 On va donner explicitement la solution de (III)

Soient les polynômes définis par

$$\omega(X) = (X - a_0) \ldots (X - a_n)$$

$$\omega_j(X) = \frac{\omega(X)}{X - a_j} \qquad 0 \leq j \leq n$$

III 8 1°) Trouver des réels d_j tels que les polynômes définis par

$$G_j(X) = d_j \omega_j(X) \quad \text{vérifie} \quad G_j(a_j) = 1$$

III 8 2°) Montrer que $(G_0, \ldots G_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

Donner la base duale.

III 8 3°) Ecrire P, solution de (III) dans la base $(G_0, \ldots, G_n)$ et donner une forme explicite de P.

III 8 4°) Retrouver le résultat ci-dessus en decomposant la fraction rationnelle $\frac{P}{\omega}$ en éléments simples

PARTIE IV

IV 1°) Montrer que l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$

$$P \longrightarrow \|P\| = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)| \qquad \text{est une norme sur } \mathcal{P}$$

On considère maintenant $\mathcal{P}$ muni de la topologie définie par cette norme.

IV 2°) Soit L la forme linéaire sur $\mathcal{P}$ définie par :

$\forall P \in \mathcal{P} \qquad L(P) = P(2)$

Est-elle continue.

IV 3°) L_n désigne la restriction de L à $\mathcal{P}_n$: $\forall P \in \mathcal{P}_n \; L_n(P) = P(2)$

Montrer que L_n est continue et qu'il existe un polynôme $T \in \mathcal{P}_n$ tel que $\|T\| = 1$ et tel que $|T(2)| = \sup_{\|P\| = 1} L_n(P)$

On pose alors $|||L_n||| = |T(2)|$

On cherche à calculer $|||L_n|||$

IV 4°) on pose $a_k = \cos \frac{k\pi}{n} \qquad 0 \leq k \leq n$

Soit T un polynôme de norme 1. En écrivant T dans la base $(G_0, \ldots, G_n)$ montrer que si $|T(a_i)| = 1$ et si les $T(a_i)$ ont un signe convenable, alors $|T(2)| = |||L_n|||$

IV 5°) Montrer que T_n est de norme 1

IV 6°) Montrer que $|||L_n||| = \operatorname{ch}(n \operatorname{Argch} 2)$ et que c'est un entier

FIN

NB; Il n'y a pas de pages 187 et 188.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail